Institut für Technische Mechanik
Prof. Dr.-Ing. W. Seemann

Mathematische Methoden der Schwingungslehre

Übungsblatt Nr. ϵ **Dominik Kern**

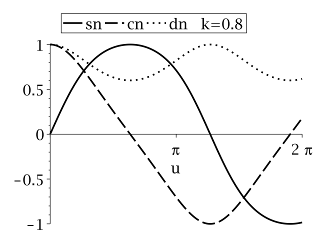
Thema: **Elliptische Integrale und Elliptische Funktionen** Integrale $\int R\big(t, \sqrt{P(t)}\big)\,\mathrm{d}t$, in denen R eine rationale Funktion und $P(t)$ ein Polynom bis 4. Grades ist, heißen *Elliptische Integrale*.

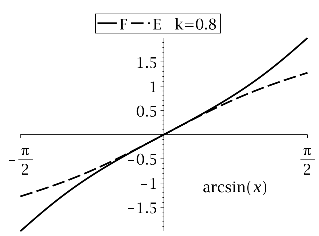
1. **Historie und Anwendungen:** Umfang U einer Ellipse $[x, y]^T = [a \sin t, b \cos t]^T$, Annahme: $a > b$
$\frac{U}{4} = \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}\,\mathrm{d}t = a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{a^2-b^2}{a^2} \sin^2 t}\,\mathrm{d}t = aE(k)$ mit $k^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}$
Anwendungen: Pendel ($\sin\varphi \neq \varphi$), große Biegungen schlanker Balken *Elastica* und Bewegungsgleichgungen des Kreisels als kinematisches Analogon, Punkt- und Linienkontakt *Hertz'scher Kontakt*, Bewegungsgleichungen mit Reibung, nichtlineare Wellen *Solitons*, Zweikörperproblem.

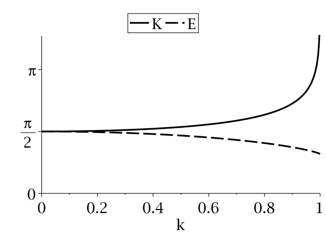
2. **Definition und Transformationen:**
Alle *Elliptischen Integrale* lassen sich in Normalform mit Modul k und Amplitude φ transformieren.

	Normalform, $x = \sin\varphi$	$\rightsquigarrow$ Legendre Form	Notation	Reihe
1.Art: $u =$	$\int_0^x \frac{\mathrm{d}\bar{x}}{\sqrt{(1-\bar{x}^2)(1-k^2\bar{x}^2)}}$	$= \int_0^\varphi \frac{\mathrm{d}\bar{\varphi}}{\sqrt{1-k^2\sin^2\bar{\varphi}}}$	$= F(\varphi, k)$	$\approx \varphi + \frac{k^2\varphi^3}{6} + \ldots$
2.Art: $u =$	$\int_0^x \sqrt{\frac{(1-k^2\bar{x}^2)}{(1-\bar{x}^2)}}\,\mathrm{d}\bar{x}$	$= \int_0^\varphi \sqrt{1-k^2\sin^2\bar{\varphi}}\,\mathrm{d}\bar{\varphi}$	$= E(\varphi, k)$	$\approx \varphi - \frac{k^2\varphi^3}{6} + \ldots$
3.Art: $u =$	$\int_0^x \frac{\mathrm{d}\bar{x}}{(1+n\bar{x}^2)\sqrt{(1-\bar{x}^2)(1-k^2\bar{x}^2)}}$	$= \int_0^\varphi \frac{\mathrm{d}\bar{\varphi}}{(1+n\sin^2\bar{\varphi})\sqrt{1-k^2\sin^2\bar{\varphi}}}$	$= \Pi(\varphi, k, n)$	alternativ [Landen]

Die *Elliptischen Integrale* (mehrdeutig) mit $\varphi = \pi/2$ heissen vollständig, Notation $K(k) = F(\pi/2, k)$,
Sonderfälle $K(0) = \pi/2$, $K(1) = \infty$. Komplementärmodul $k'^2 = 1 - k^2$, $K' = K(k') = K\sqrt{1-k^2}$.
Die Umstellung nach der oberen Integrationsgrenze führt zu den *Elliptischen Funktionen* (eindeutig).
Eine besondere Rolle spielen die des Integrals erster Art, sog. *Jacobi-Funktionen*.
$\varphi = \mathrm{am}\ u,\ x = \sin(\mathrm{am}\ u) = \mathrm{sn}\ u \approx u - (1+k^2)u^3/3!,\ \cos(\mathrm{am}\ u) = \mathrm{cn}\ u \approx 1 - u^2/2! + (1+4k^2)u^4/4!,$
$\sqrt{1 - k^2\sin^2(\mathrm{am}\ u)} = \mathrm{dn}\ u \approx 1 - k^2u^2/2! + k^2(4+k^2)u^4/4!$







Jacobi-Funktionen als $f(u, k)$ Unvollständige Ell. Int. als $f(\varphi, k)$ Vollständige Ell. Int. als $f(k)$

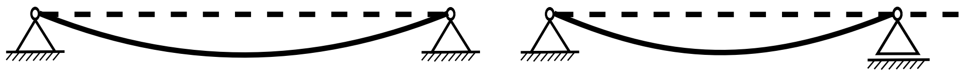
3. **Eigenschaften, Differenzation, Additionstheoreme:** $\mathrm{sn}^2 u + \mathrm{cn}^2 u = 1$, $\mathrm{dn}^2 u + k^2\mathrm{sn}^2 u = 1$
Symmetrie $\mathrm{sn}(-u) = -\mathrm{sn}(u)$, $\mathrm{cn}(-u) = +\mathrm{cn}(u)$, $\mathrm{dn}(-u) = +\mathrm{dn}(u)$
Periodizität $\mathrm{sn}(u + 2K) = -\mathrm{sn}\ u$, $\mathrm{cn}(u + 2K) = +\mathrm{cn}(u + 2jK') = -\mathrm{cn}\ u$, $\mathrm{dn}(u + 2jK) = -\mathrm{dn}\ u$
Sonderfälle $k = 0$: $\mathrm{am}\ u = u$, $\mathrm{dn}\ u = 1$; $k = 1$: $\mathrm{am}\ u = \mathrm{gd}\ u = \mathrm{atan}(\sinh u) + C_1$, $\mathrm{dn}\ u = \mathrm{sech}\ u$
$\frac{\mathrm{d\ sn}u}{\mathrm{d}u} = \mathrm{dn}\ u\ \mathrm{cn}\ u$, $\frac{\mathrm{d\ cn}u}{\mathrm{d}u} = -\mathrm{dn}\ u\ \mathrm{sn}\ u$, $\frac{\mathrm{d\ dn}u}{\mathrm{d}u} = -k^2\mathrm{sn}\ u\ \mathrm{cn}\ u$, $\int \mathrm{sn}u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{k}\log(\mathrm{dn}u - k\,\mathrm{cn}u)$
$\mathrm{sn}(u \pm v) = \frac{\mathrm{sn}u\mathrm{cn}v\mathrm{dn}v \pm \mathrm{sn}v\mathrm{cn}u\mathrm{dn}u}{1-k^2\mathrm{sn}^2u\ \mathrm{sn}^2v}$, $\mathrm{cn}(u \pm v) = \frac{\mathrm{cn}u\mathrm{cn}v \mp \mathrm{sn}u\mathrm{sn}v\mathrm{dn}u\mathrm{dn}v}{1-k^2\mathrm{sn}^2u\ \mathrm{sn}^2v}$, $\mathrm{dn}(u \pm v) = \frac{\mathrm{dn}u\mathrm{dn}v \mp k^2\mathrm{sn}u\mathrm{sn}v\mathrm{cn}u\mathrm{cn}v}{1-k^2\mathrm{sn}^2u\ \mathrm{sn}^2v}$,
$\mathrm{sn}^2 u = \frac{1-\mathrm{cn}2u}{1+\mathrm{dn}2u}$, $\mathrm{cn}^2 u = \frac{\mathrm{cn}2u+\mathrm{dn}2u}{1+\mathrm{dn}2u}$, $\mathrm{dn}^2 u = \frac{\mathrm{dn}2u+k^2\mathrm{cn}2u+k'^2}{1+\mathrm{dn}2u}$
$F(\varphi, k) = -F(-\varphi, k)$, $F(n\pi \pm \varphi, k) = nK(k) \pm F(\varphi, k)$, $E = \int \mathrm{dn}^2 u\ \mathrm{d}u$
$F(\varphi, k) = k^{-1/2}F(\theta, k^{-1})$ mit $\sin\theta = k^{-1/2}\sin\varphi$

4. **Literatur:** (Moderne math. Literatur befasst sich vor allem mit den Eigenschaften Ell. Integrale/Funktionen im Zusammenhang mit komplexer Analysis und ist für den Einstieg nicht zu empfehlen.)

F. Oberhettinger, W. Magnus: *Anwendung der Elliptischen Funktionen in Physik u. Technik*; F.G. Tricomi, M. Krafft: *Elliptische Funktionen*; H. Hancock: *Elliptic Integrals*; A. Hurwitz, R. Courant: *Funktionentheorie*; P.F. Byrd, M.D. Friedman: *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists*; A.G. Greenhill: *The Applications of Elliptic Functions*;

Aufgabe α 1 Biegeschwingungen großer Amplitude

kern@kit.edu



Biegeschwingungen führen bei großen Ausschlägen entweder zu Längsdehnungen des Balkens oder Verschiebungen des Loslagers. Als Schwingform wird eine Sinuskurve $[x(t), y(t)]^T = [ct, \hat{w} \sin t]^T$ angenommen (Lösung der linearen DGL gelenkig-gelenkig).

1. Berechnung der amplitudenabhängigen Länge $L(\hat{w})$ im Fall Festlager-Festlager.

2. Entwicklung der Länge $L(\hat{w})$ in eine Reihe.

3. Berechnung der Loslagerverschiebung im Fall Festlager-Loslager bei Annahme einer konstanten Länge L_0.

Anmerkung: Diese Betrachtungen sind rein kinematischer Natur und nicht kinetisch begründet.

Lösung zur Aufgabe α 1

Parameterdarstellung der Biegelinie $[x(t), y(t)]^T = [ct, \hat{w}\sin t]^T$ mit der Normierung $0 \le t \le \pi$.

1. Länge der Biegelinie (Festlager-Festlager):

$$L = \int_0^\pi \sqrt{c^2 + \hat{w}^2\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{\pi/2} \sqrt{c^2 + \hat{w}^2\cos^2 t}\,\mathrm{d}t \tag{1}$$

$$L = 2\sqrt{c^2+\hat{w}^2}\int_0^{\pi/2}\sqrt{1 - \frac{\hat{w}^2}{c^2+\hat{w}^2}\sin^2 t}\,\mathrm{d}t \tag{2}$$

$$L = 2\frac{\hat{w}}{k}E(k) \qquad \text{mit} \qquad k^2 = \frac{\hat{w}^2}{c^2+\hat{w}^2} \tag{3}$$

2. Reihenentwicklung der Länge (Festlager-Festlager):

$$E(k) = \frac{\pi}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{1-2m}\binom{-1/2}{m}^2 k^{2m} \tag{4}$$

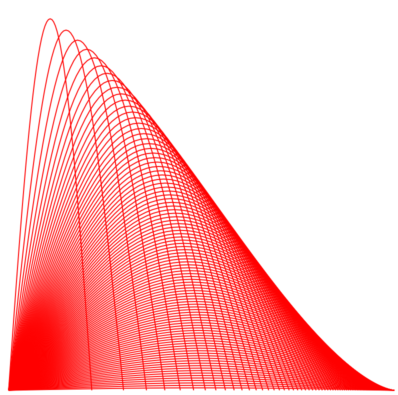
$$L \approx 2\frac{\hat{w}}{k}\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{4}k^2 - \frac{3}{64}k^4\right) \tag{5}$$

3. Verschiebung bei konstanter Länge (Festlager-Loslager)
   Beschreibung der Durchbiegung mit dem Parameter $k = 0\ldots 1$ (gerade bis zusammengeklappt).

$$L_0 = L = 2\left|\frac{\hat{w}}{k}\right| E(k) \tag{6}$$

$$\hat{w} = \frac{kL_0}{2E(k)} \qquad \text{entsprechende Durchbiegung} \tag{7}$$

$$c = \frac{L_0}{2E(k)}\sqrt{1-k^2} \qquad \text{entsprechende Schrumpfung des Lagerabstandes} \tag{8}$$



Biegelinien konstanter Länge

Anmerkung: Für die Länge einer halben Sinuskurve $(0\ldots\pi/2)$, wie man sie beispielsweise zur Beschreibung des 1. Euler'schen Knickfalls verwenden kann, gilt aufgrund der Symmetrie

$$\hat{w} = \frac{kL_0}{E(k)} \tag{9}$$

$$c = \frac{L_0}{E(k)}\sqrt{1-k^2}. \tag{10}$$

Aufgabe $\boldsymbol{\alpha}$ 2 Mathematisches Pendel

Quelle: "Anwendungen der Elliptischen Funktionen in Physik und Technik" Magnus, Oberhettinger

In den meisten Fällen werden kleine Auslenkungen $\varphi < \pi/20$ angenommen. Das trifft nicht immer zu, z.B. bei Schaukeln. Ausgangspunkt ist die nichtlineare Bewegungsgleichung

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{L}\sin\varphi = 0$$

.

1. Schwingungsdauer einer Viertelperiode
2. Vergleich mit der Linearisierung ($\sin\varphi = \varphi$) und Näherungslösung gemäß Störungsrechnung (siehe Aufgabe E6.5 des 7.Übungsblatts aus Mathematische Methoden der Schwingungslehre ITM/KIT)

Anmerkung: Nach dem gleichen Vorgehen lässt sich auch die Periodendauer der freien Schwingung eines Schwingers mit linear-kubischer Kennlinie („Duffing Schwinger") berechnen.

Lösung zur Aufgabe α 2

Bewegungsgleichung:

$$E_{kin}(t) + E_{pot}(t) = E_{kin}(0) + E_{pot}(0) \quad | \quad E_{pot} = L(1-\cos\varphi)mg, \quad E_{kin} = \frac{m}{2}v^2 \tag{1}$$

$$\dot\varphi^2 = \dot\varphi_0^2 + (\cos\varphi - \cos\varphi_0)2g/L \quad | \quad v_0^2 = L^2\dot\varphi_0^2 \tag{2}$$

1. Viertelperiode:

$$t = L\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{v_0^2 + 2gL(\cos\varphi - \cos\varphi_0)}} \quad | \quad \cos\varphi = 1 - 2\sin^2\frac{\varphi}{2}, \quad v_0 = 0 \tag{3}$$

$$t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{g}}\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{\sin^2\frac{\varphi_0}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}}} \quad | \quad \begin{array}{l} \sin\frac{\varphi}{2} = \sin\frac{\varphi_0}{2}\sin u, \\ \varphi = 2\mathrm{asin}(\sin\frac{\varphi_0}{2}\sin u), \\ \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}u} = \frac{2\sin\frac{\varphi_0}{2}\cos u}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\varphi_0}{2}\sin^2 u}} \end{array} \tag{4}$$

$$t = \sqrt{\frac{L}{g}}\int_{u_0}^{u} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\varphi_0}{2}\sin^2 u}} \quad | \quad \varphi(t=0) = \varphi_0,\ u(t=0) = u_0 = \pi/2 \tag{5}$$

$$t = \sqrt{\frac{L}{g}}\int_{u_0}^{u}\cdots = \sqrt{\frac{L}{g}}\left(\int_0^u \cdots - \int_0^{u_0}\ldots\right) \quad | \quad k^2 = \sin^2\frac{\varphi_0}{2} \tag{6}$$

$$t = \sqrt{\frac{L}{g}}\big(F(k,u) - K(k)\big) \quad | \quad T/4 = t(\varphi = 0),\ u(\varphi=0) = 0 \tag{7}$$

$$F(k,u) = t\sqrt{\frac{g}{L}} + K(k) \quad | \quad u = \mathrm{am}\big(t\sqrt{g/L} + K(k)\big) \tag{8}$$

$$\sin u = \frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi_0}{2}} = \ \mathrm{sn}\big(t\sqrt{g/L} + K(k)\big) \quad | \quad \varphi(t=0) = \varphi_0,\ \varphi(t = T/4) = 0 \tag{9}$$

$$T/4 = K(k)\sqrt{\frac{L}{g}} \tag{10}$$

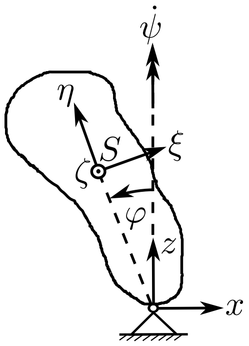
2. Vergleich mit linearer Theorie und Störungsrechnung
   Lineare Theorie: $K(k) \approx K(0) = \pi/2$

   Näherung: $K(k) \approx \pi/2\left(1 + \frac{1}{4}k^2 + \frac{9}{64}k^4\right)$

   alternativ: Sinusfunktion in Reihe bis zum kubischen Glied entwickeln (Duffing)

Anmerkung: Physikalisches Pendel $\quad T = 4K(k)\sqrt{\frac{J_A}{mgL_S}} \quad$ mit $\quad k = \sin\frac{\varphi_0}{2}$

Aufgabe $\boldsymbol{\alpha}$ 3 Kreiselbewegung



Ein Starrkörper rotiert in der Schwerelosigkeit ($g = 0$) mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\dot{\psi}$ mitsamt seiner drehbaren Lagerung (Drehwinkel φ) um die raumfeste $z-$Achse. Sein Winkelgeschwindigkeitsvektor im körperfesten $\xi\eta\zeta-$Hauptachsensystem ist

$$\underset{\sim}{\omega} = \dot{\psi} \sin\varphi \underset{\sim}{e}_\xi + \dot{\psi}\cos\varphi \underset{\sim}{e}_\eta + \dot{\varphi}\underset{\sim}{e}_\zeta .$$

Die Auswertung der Eulerschen Kreiselgleichungen ergibt die Bewegungsgleichung

$$M_\zeta = 0 = J_\zeta \ddot{\varphi} - (J_\xi - J_\eta)\dot{\psi}^2 \sin\varphi \cos\varphi .$$

Berechnen Sie die Lösung $\varphi(t)$ der Bewegungsgleichung für den Fall

1. einer oszillierenden Bewegung, für den Umkehrpunkte ($\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t = 0$) existieren
2. und für den Fall einer durchdrehenden Bewegung ($\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t > 0 \ \forall t \geq 0$).

<u>Anmerkung:</u> Ähnliche Gleichungen treten beim kräftefreien Kreisel auf. Auch für den schweren Kreisel (Schwerpunkt ungleich Fixpunkt $\rightsquigarrow$ Schweremoment) lassen sich analytische Lösungen mittels Elliptischer Funktionen finden, sie sind jedoch deutlich schwieriger, siehe

- Kurt Magnus: "Kreisel–Theorie und Anwendung",
- Richard Grammel: "Der Kreisel - Erster Band Theorie des Kreisels",
- Felix Klein & Arnold Sommerfeld: "Theorie des Kreisels".

Lösung zur Aufgabe α 3 (Kreisel)

$$J_\zeta \ddot{\varphi} - (J_\xi - J_\eta)\dot{\psi}^2 \sin\varphi\cos\varphi = 0 \quad | \quad \sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x \tag{1}$$

$$2\ddot{\varphi} + (J_\eta - J_\xi)\dot{\psi}^2 \sin 2\varphi = 0 \quad | \quad 2\varphi = \Theta,\ (J_\eta - J_\xi)\dot{\psi}^2 = R \tag{2}$$

$$\ddot{\Theta} + R\sin\Theta = 0 \quad | \quad \cdot\dot{\Theta}, \int \ldots \mathrm{d}t \tag{3}$$

$$\frac{1}{2}\dot{\Theta}^2 - R\cos\Theta + C = 0 \quad | \quad \dot{\Theta}(0) = 0 \rightsquigarrow C = R\cos\Theta_0 \tag{4}$$

1. Mit Umkehrpunkt $\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}t}|_{t=0} = 0$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 = 2R(\cos\Theta - \cos\Theta_0) \quad | \quad \tau = t\sqrt{R} \tag{5}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 = 2(\cos\Theta - \cos\Theta_0) \quad | \quad \cos x = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2} \tag{6}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 = 4(\underbrace{\sin^2\frac{\Theta_0}{2}}_{k^2} - \sin^2\frac{\Theta}{2}) \quad | \quad \begin{array}{l} \sin\frac{\Theta}{2} = k\sin\gamma \\ \frac{1}{2}\cos\frac{\Theta}{2}\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\tau} = k\cos\gamma\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}\tau} \end{array} \tag{7}$$

$$\left(\frac{2k\cos\gamma}{\cos\frac{\Theta}{2}}\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 = 4k^2(1 - \sin^2\gamma) \quad | \quad k = \sin\frac{\Theta_0}{2} = 0\ldots 1 \tag{8}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 = \frac{1-\sin^2\gamma}{\cos^2\gamma}(1 - \sin^2\frac{\Theta}{2}) = 1 - k^2\sin^2\gamma \quad | \quad \pm\sqrt{\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}\tau}} \text{ zwei Lösungszweige!} \tag{9}$$

$$\mathrm{d}\tau = \frac{\mathrm{d}\gamma}{\sqrt{1 - k^2\sin\gamma}} \quad | \quad \int,\ \Theta(0) = \Theta_0 \to \gamma(0) = \pi/2 \tag{10}$$

$$\tau + K(k) = F\left(\underbrace{\mathrm{asin}\left(\frac{\sin\frac{\Theta}{2}}{k}\right)}_{\gamma}, k\right) \quad | \quad \Leftrightarrow \tag{11}$$

$$\underline{\underline{k\ \mathrm{sn}\big(\tau + K(k)\big) = \sin\frac{\Theta}{2}}} = k\sin\gamma \quad | \quad \text{für } \dot{\Theta}(t) \tag{12}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 = 4k^2\left[1 - \mathrm{sn}^2\big(\tau + K(k)\big)\right] \quad | \quad 1 - \mathrm{sn}^2 x = \mathrm{cn}^2 x \tag{13}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\tau}\right) = 2k\ \mathrm{cn}\big(\tau + K(k)\big) \tag{14}$$

$$\tag{15}$$

2. Ohne Umkehrpunkt

$$\left(\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 = 2R(\cos\Theta + 1 + 2\frac{1-k^2}{k^2}) \quad | \quad \tau = \frac{\sqrt{R}}{k}t \tag{16}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 = 4(1 - k^2 \sin\frac{\Theta}{2}) \quad | \quad \Theta^* = \frac{\Theta}{2}, \int \ldots \Theta^* \tag{17}$$

$$\tau = \int_0^{\Theta^*} \frac{2\mathrm{d}\Theta^*}{2\sqrt{1-k^2\sin\Theta^*}} \quad | \quad \Leftrightarrow \tag{18}$$

$$\underline{\underline{\mathrm{sn}(\tau) = \sin\frac{\Theta}{2}}} \quad | \quad \text{für } \dot{\Theta}(t) \tag{19}$$

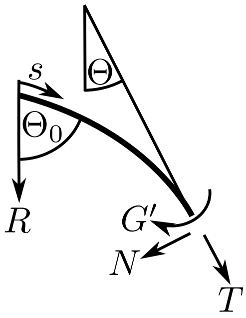
$$\left(\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 = 4(1 - k^2\mathrm{sn}^2\tau) \quad | \quad 1 - k^2\mathrm{sn}^2x = \mathrm{dn}^2x \tag{20}$$

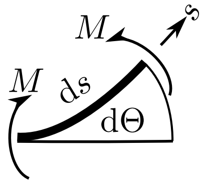
$$\left(\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\tau}\right) = 2\ \mathrm{dn}\tau \quad | \quad \tau = \frac{\sqrt{R}}{k}t \tag{21}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}t}\right) = 2\frac{\sqrt{R}}{k}\mathrm{dn}\tau \tag{22}$$

Aufgabe $\boldsymbol{\alpha}$ 3 Elastica (Kreiselanalogie)

Quelle: "A treatise on the mathematical theory of elasticity" A.E.H. Love (Notation in Anlehnung an die Differenzialgeometrie)





Bei großen Biegungen ist die Näherung der Krümmung $\Theta/\mathrm{d}s \approx w''$ nicht mehr zulässig. Die Biegelinie der sog. Elastica ergibt sich aus dem Kräftegleichgewicht in Richtung der Querkraft N. Das Schnittmoment (Biegesteifigkeit $B = EI$) ist $M = B\mathrm{d}\Theta/\mathrm{d}s$ und die Schnittkraft folgt durch Differenzation nach der Bogenlänge $N = \mathrm{d}M/\mathrm{d}s = B\mathrm{d}^2\Theta/\mathrm{d}s^2$. Unter Einbeziehung der äußeren Last R an der Stelle $s = 0$ folgt

$$R \sin\Theta + B\mathrm{d}^2\Theta/\mathrm{d}s^2 = 0$$

woraus sich nach Multiplikation mit $\mathrm{d}\Theta/\mathrm{d}s$ und anschließender Integration $\int \ldots \mathrm{d}s$ unter Beachtung der Randbedingung $\mathrm{d}\Theta/\mathrm{d}s|_{s=0} = 0$ die Biegedifferenzialgleichung

$$-R\cos\Theta + \frac{B}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}s}\right)^2 = -R\cos\Theta_0$$

ergibt. Berechnen Sie deren Lösung für die zwei zu unterscheidenden Fälle:

1. Es gibt einen Wendepunkt ($\mathrm{d}\Theta/\mathrm{d}s = 0$), z.B. an einem freien Ende ohne Momentenbelastung. Passen Sie die Lösung an einen Kragträger an, d.h. berechnen Sie bei gegebenem Neigungswinkel am Ende des Balkens (Kraftangriffspunkt) und gegebener Kraftrichtung den Betrag der angreifenden Kraft ($\Theta_L, \Theta_0 \rightsquigarrow R$).

2. Es gibt keinen Wendepunkt.

Lösungen für spezielle Fälle finden sich im Buch "Flexible Bars" von Frisch-Fay und dem Artikel "Modeling of Flexural Beams Subjected to Arbitrary End Loads" von Kimball und Tsai. Weiterhin ist auch die Variationsformulierung in Max Born's Dissertation "Stabilität der elastischen Linie in Ebene und Raum" sehr interessant. Aspekte zur Dynamik der Elastica finden sich bei S.S. Antman und V.V. Eliseev.

Lösung zur Aufgabe α 3 (Elastica)

1. Mit Wendepunkt $\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}s}|_{s=0} = 0$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}s}\right)^2 = \frac{2R}{B}(\cos\Theta - \cos\Theta_0) \quad | \quad u = s\sqrt{R/B} \tag{1}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}u}\right)^2 = 2(\cos\Theta - \cos\Theta_0) \quad | \quad \cos x = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2} \tag{2}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}u}\right)^2 = 4(\underbrace{\sin^2\frac{\Theta_0}{2}}_{k^2} - \sin^2\frac{\Theta}{2}) \quad | \quad \begin{array}{l} \sin\frac{\Theta}{2} = k\sin\gamma \\ \frac{1}{2}\cos\frac{\Theta}{2}\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}u} = k\cos\gamma\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}u} \end{array} \tag{3}$$

$$\left(\frac{2k\cos\gamma}{\cos\frac{\Theta}{2}}\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}u}\right)^2 = 4k^2(1-\sin^2\gamma) \quad | \quad k = \sin\frac{\Theta_0}{2} = 0\ldots 1 \tag{4}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}u}\right)^2 = \frac{1-\sin^2\gamma}{\cos^2\gamma}(1-\sin^2\frac{\Theta}{2}) = 1 - k^2\sin^2\gamma \quad | \quad \pm\sqrt{\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}u}} \text{ zwei Lösungszweige!} \tag{5}$$

$$\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}\gamma}{\sqrt{1-k^2\sin\gamma}} \quad | \quad \int,\ \Theta(0) = \Theta_0 \to \gamma(0) = \pi/2 \tag{6}$$

$$u + K(k) = F\left(\underbrace{\operatorname{asin}\left(\frac{\sin\frac{\Theta}{2}}{k}\right)}_{\gamma}, k\right) \quad | \quad \gamma = \operatorname{am}[u + K(k)] \tag{7}$$

$$k\ \operatorname{sn}\big(u + K(k)\big) = \sin\frac{\Theta}{2} = k\sin\gamma \quad | \quad x(s),\ y(s):\ \text{Einsetzen in (3)} \tag{8}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}u}\right)^2 = 4k^2\left[1 - \operatorname{sn}^2\big(u + K(k)\big)\right] \quad | \quad 1 - \operatorname{sn}^2 x = \operatorname{cn}^2 x \tag{9}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}u}\right) = 2k\ \operatorname{cn}\big(u + K(k)\big) \quad | \quad \text{für später} \tag{10}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \cos\theta \quad | \quad (8),\ \sin\frac{\Theta}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos\Theta)} \tag{11}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = 1 - 2k^2\operatorname{sn}^2\big(u + K(k)\big) \quad | \quad \mathrm{d}s = \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{R/B}} \tag{12}$$

$$\mathrm{d}x = \frac{1 - 2k^2\operatorname{sn}^2\big(u + K(k)\big)}{\sqrt{R/B}}\mathrm{d}u \quad | \quad \int_0^v \ldots \mathrm{d}v^*,\ v = u + K(k) \tag{13}$$

$$x = \sqrt{\frac{B}{R}}\left(\int_K^v -1\ \mathrm{d}v^* + 2\int_K^v \underbrace{1 - k^2\operatorname{sn}^2 v^*}_{\operatorname{dn}^2 v^*}\ \mathrm{d}v^*\right) \quad | \quad \int_0^v \operatorname{dn}^2 v^*\ \mathrm{d}v^* = E(\operatorname{am} v) \tag{14}$$

$$x = \sqrt{\frac{B}{R}}\left\{-u + 2\left[E\big(\overbrace{\operatorname{am}[u+K]}^{\gamma}\big) - E\big(\overbrace{\operatorname{am}[K]}^{\gamma(0)=\pi/2}\big)\right]\right\} \quad | \quad \text{weiter mit (11)} \tag{15}$$

Allgemein ist γ, es enthält Θ_0 und $\Theta(s)$, günstig um den Verformungzustand zu beschreiben, weil es als Integrationsgrenze in den elliptischen Integralen auftritt.

$$
\begin{aligned}
-1+2-2k^2\mathrm{sn}^2(u+K) &= \cos\Theta \quad & \Big| \quad & 1-k^2\mathrm{sn}^2x=\mathrm{dn}^2x && (16)\\
-1+2\mathrm{dn}^2(u+K) &= \cos\Theta \quad & \Big| \quad & \mathrm{d}/\mathrm{d}u && (17)\\
-4k^2\mathrm{dn}(u+K)\ \mathrm{sn}(u+K)\ \mathrm{cn}(u+K) &= -\sin\Theta\ \mathrm{d}\Theta/\mathrm{d}u \quad & \Big| \quad & \text{mit (10)} && (18)\\
2k\ \mathrm{dn}(u+K)\ \mathrm{sn}(u+K) &= \sin\Theta \quad & \Big| \quad & \sin\Theta=\mathrm{d}y/\mathrm{d}s && (19)\\
2k\ \mathrm{dn}(u+K)\ \mathrm{sn}(u+K)\sqrt{B/R}\ \mathrm{d}u &= \mathrm{d}y \quad & \Big| \quad & \int_0^v \ldots \mathrm{d}v^*,\ v=u+K(k) && (20)\\
y &= \sqrt{\frac{B}{R}}2k\underbrace{\int_0^v \mathrm{dn}v^*\ \mathrm{sn}v^*\ \mathrm{d}v^*}_{-\mathrm{cn}v+C} \quad & \Big| \quad & y(0)=0 && (21)\\
y &= -2k\sqrt{\frac{B}{R}}\overbrace{\mathrm{cn}(u+K)}^{\cos\gamma} &&&& (22)\\
&&&&& (23)
\end{aligned}
$$

Aus den RB des Balkens (freies Ende $\Theta(s=0)=\Theta_0$ und Einspannung $\Theta(s=L)=\Theta_L$) folgt der Skalierungsfaktor von $u\to s$ und damit R.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{sn}(u_L+K) &= \sin\gamma_L \quad & \Big| \quad & \text{(8) an der Stelle } s=L && (24)\\
u_L+K &= F(\gamma_L,k) \quad & \Big| \quad & \text{am } u=\varphi \leftrightarrow u=F(\varphi,k) && (25)\\
u_L=F(\gamma_L,k)-K(k) &= L\sqrt{R/B} \quad & \Big| \quad & \text{siehe (1), } k=\sin\frac{\Theta_0}{2} && (26)\\
\underline{\underline{R=\big(F(\gamma_L,k)-K(k)\big)^2\frac{B}{L^2}}} & \quad & \Big| \quad & \text{mit } \sin\gamma_L=\frac{\sin\frac{\Theta_L}{2}}{\sin\frac{\Theta_0}{2}} && (27)
\end{aligned}
$$

Alternativ lassen sich zwei andere der drei Größen Θ_0, Θ_L, R vorgeben. Die dritte folgt stets aus Gl. (8).

2. <u>Ohne Wendepunkt</u>

$$\left(\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}s}\right)^2 = \frac{2R}{B}(\cos\Theta + 1 + 2\frac{1-k^2}{k^2}) \quad \Big| \quad u = \frac{\sqrt{R/B}}{k}s \tag{28}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}u}\right)^2 = 4(1 - k^2\sin\frac{\Theta}{2}) \quad \Big| \quad \Theta^* = \frac{\Theta}{2},\ \int \ldots \Theta^* \tag{29}$$

$$u = \int_0^{\Theta^*} \frac{2\mathrm{d}\Theta^*}{2\sqrt{1-k^2\sin\Theta^*}} \quad \Big| \quad \Leftrightarrow \tag{30}$$

$$\underline{\underline{\mathrm{sn}(u) = \sin\frac{\Theta}{2}}} \quad \Big| \quad x(s),\ y(s):\ \text{Einsetzen in (24)} \tag{31}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}u}\right)^2 = 4(1 - k^2\mathrm{sn}^2 u) \quad \Big| \quad 1 - k^2\mathrm{sn}^2 x = \mathrm{dn}^2 x \tag{32}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}u}\right) = 2\ \mathrm{dn}u \quad \Big| \quad u = \frac{\sqrt{R/B}}{k}s \tag{33}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}s}\right) = 2\frac{\sqrt{R/B}}{k}\mathrm{dn}u \tag{34}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \cos\Theta \quad \Big| \quad \cos\Theta = 1 - \sin^2\frac{\Theta}{2} \tag{35}$$

$$\mathrm{d}x = \big(-1 + 2(1 - \mathrm{sn}^2 u)\big)\frac{k}{\sqrt{R/B}}\mathrm{d}u \quad \Big| \quad 1 - k^2\mathrm{sn}^2 x = \mathrm{dn}^2 x \tag{36}$$

$$\mathrm{d}x = \big(1 - \frac{2}{k^2} + \frac{2}{k^2}\mathrm{dn}^2 u\big)k\sqrt{\frac{B}{R}}\mathrm{d}u \quad \Big| \quad \int \ldots \mathrm{d}u,\ \int_0^{u^*} \mathrm{dn}^2 u\ \mathrm{d}u = E(\mathrm{am}\ u) \tag{37}$$

$$\underline{\underline{x = k\sqrt{\frac{B}{R}}\left(\left(1 - \frac{2}{k^2}\right)u + \frac{2}{k^2}E(\mathrm{am}\ u, k)\right)}} \tag{38}$$

$$\sin\frac{\Theta}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos\Theta)} = \mathrm{sn}u \quad \Big| \quad \Leftrightarrow \tag{39}$$

$$\cos\Theta = -1 + 2\underbrace{(1 - \mathrm{sn}^2 u)}_{\mathrm{cn}^2 u} \quad \Big| \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} \tag{40}$$

$$-\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}s}\sin\Theta = -4\ \mathrm{sn}u\ \mathrm{cn}u\ \mathrm{dn}u\ \frac{k}{\sqrt{R/B}} \quad \Big| \quad \cdot\left(-\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}s}\right)^{-1} \text{aus (30)} \tag{41}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = \sin\Theta = 2\ \mathrm{sn}u\ \mathrm{cn}u \quad \Big| \quad \mathrm{d}s = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}u}\mathrm{d}u \tag{42}$$

$$\mathrm{d}y = \frac{2}{k^2}k^2\mathrm{sn}u\ \mathrm{cn}u\ \frac{k}{\sqrt{R/B}}\mathrm{d}u \quad \Big| \quad \int \ldots \mathrm{d}u \tag{43}$$

$$\underline{\underline{y = -\frac{2}{k}\sqrt{\frac{B}{R}}\mathrm{dn}u}} \tag{44}$$