Numerische Lösung partieller Differentialgleichungen mit COMSOL Multiphysics - Ein Minimalbeispiel

Dominik Kern[a], Georg Jehle[b]

13. Dezember 2009

Zusammenfassung

COMSOL Multiphysics ist ein numerisches Werkzeug zur Lösung partieller Differentialgleichungen auf Basis von Finite-Elemente-Methoden (FEM). Im Vergleich zu anderen FEM-Programmen bietet es dem Anwender die Freiheit eigene Gleichungen zu definieren. Dieser Artikel beschreibt wie und in welcher Form partielle Differentialgleichungen eingegeben und entsprechend ihrer Rand- und Anfangsbedingungen numerisch gelöst werden können. Als Beispiel dient ein sowohl mechanisch als auch thermisch belasteter Dehnstab unter Berücksichtigung der Wechselwirkung zwischen dem Verschiebungs- und dem Temperaturfeld.

Inhaltsverzeichnis

[a] kern@kit.edu

[b] g-jehle@hotmail.com

Thermomechanisches Modell des Dehnstabes

Das Modell stammt aus der Aufgabe 4-4 der Lehrveranstaltung "Mathematische Methoden der Dynamik" der Universität Karlsruhe. Es handelt sich um eine eindimensionale, thermomechanische Aufgabe. Einen Dehnstab der links fest eingespannt und rechts durch eine zeitabhängige Kraft belastet wird. Am linken Rand ist die Temperatur vorgeschrieben und am rechten findet ein konvektiver Wärmeübergang statt. Entlang der Länge findet keine Wechselwirkung mit der Umgebung statt, der Stab ist thermisch isoliert und es wirken keine äußeren Kräfte. Der Stab befindet sich im stationären Zustand und wird zur Zeit $t = 0$ punktuell und impulsartig erwärmt, z.B. durch einen Laserpuls. Der Stab wird beschrieben durch zwei partielle Differentialgleichungen. Die Verschiebungsgleichung (Verschiebung u) ergibt sich aus der lokalen Impulsbilanz und die Temperaturgleichung (Übertemperatur $v = T - T_0$) aus der Wärmeleitungsgleichung.

$$u_{,tt} - \frac{E}{\varrho} u_{,xx} = -\frac{E\alpha}{\varrho} v_{,x} \tag{1a}$$

$$v_{,t} - \frac{\lambda}{\varrho c} v_{,xx} = -\frac{T_0 E\alpha}{\varrho c} u_{,xt} \tag{1b}$$

$$\tag{1c}$$

Auf der linken Seite liegen Dirichlet Randbedingungen (RB) und auf der rechten Seite eine gekoppelte RB und eine RB 3.Art vor:

$$u(0,t) = 0 \qquad u_{,x}(L,t) = \frac{F(t)}{EA} + \alpha v(L,t) \tag{2a}$$

$$v(0,t) = v_W \qquad v_{,x}(L,t) = \frac{h}{\lambda}\Big(v_U - v(L,t)\Big) \tag{2b}$$

Lösung mit den PDE Modes

COMSOL bietet mehrere Möglichkeiten, um partielle Differentialgleichungen einzugeben: die Coefficient Form, die General Form und die Weak Form. Weiterhin kann man die Gleichung als Vektordifferentialgleichung, mit dem Vektor $[u,\ v]^T$ eingeben. Oder man koppelt zwei skalare Differentialgleichungen, eine für u und eine für v, miteinander. Es gibt demzufolge 6 Kombinationen. Die Eingabe als Vektordifferentialgleichung ist schwieriger und wird für alle drei Formulierungen vorgestellt. Die Formulierung als zwei skalare Differentialgleichungen wird nur für die Coefficient Form beschrieben. Für die beiden anderen Modes ist sie analog. Als letztes werden Überlegungen zur Wahl der Anfangsbedingungen (AB) vorgestellt, denn für eine physikalisch konsistente Formulierung dürfen sie nicht beliebig gewählt werden. Nach dem Start von COMSOL erscheint der Model Navigator. Zum Erstellen des Modells wählt man *Dimension 1D, PDE-Modes* die gewünschte Form und dann *transient analysis*.

Formulierung in der Coefficient Form

In diesem Abschnitt wird die Formulierung als Vektordifferentialgleichung mit den abhängigen Variablen $\vec{u} = [u,\ v]^T$ vorgestellt. Die Coefficient Form erwartet die Zuweisung der Koeffizienten folgender allgemeiner PDE

$$\mathbf{e_a}\vec{u}_{tt} + \mathbf{d_a}\vec{u}_t + \nabla(-\mathbf{c}\nabla\vec{u} - \boldsymbol{\alpha}\vec{u} + \boldsymbol{\gamma}) + \boldsymbol{\beta}\nabla\vec{u} + \mathbf{a}\vec{u} = \vec{f}. \tag{3}$$

Für die RB ist die allgemeine Formulierung

$$\vec{n} \cdot (+\mathbf{c}\nabla\vec{u} + \boldsymbol{\alpha}\vec{u} - \boldsymbol{\gamma}) + \mathbf{q}\vec{u} = \vec{g} - \mathbf{h}^T\vec{\mu} \tag{4a}$$

$$\mathbf{h}\vec{u} = \vec{r} \tag{4b}$$

vorgesehen. Der erste Term der Gl. 4a ist der negative Diffusionsterm aus der Feldgleichung (3). Durch die Matrizen **h** und **q** lässt sich die Art der RB festlegen. Ist **h** die Einheitsmatrix so kommt mit Gleichung (4b) eine Dirichlet-RB zum Einsatz. Die Gleichung (4a) liefert dann nur den Lagrange-Multiplikator μ. Ist **h** die Nullmatrix, dann entfällt Gleichung (4b) und (4a) beschreibt entweder eine RB 3.Art oder eine Neumann-RB, je nach Wahl der verbleibenden Matrizen.

Für die Feldgleichungen des Dehnstabes sind folgende Matrizen ungleich Null:

$$\mathbf{e_a} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{d_a} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} \frac{E}{\varrho} & 0 \\ 0 & \frac{\lambda}{\varrho c} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{E\alpha}{\varrho} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

Es gibt mehrere Möglichkeiten die Gleichung umzusetzen. Der Eintrag aus β könnte auch auf die rechte Seite $\vec{f}$ gebracht werden. Der gemischte Term kann (siehe Hilfe "PDE-Modes" letzter Abschnitt) in f eingesetzt werden. Zugriff auf die gemischte Ableitung erfolgt mit `uxt`.

$$\vec{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{T_0 E\alpha}{\varrho c} u_{,xt} \end{bmatrix} \tag{6}$$

Links sind Dirichlet-RB, rechts RB 3.Art. Beiden werden als Typ Dirichlet eingetragen. Die Unterscheidung erfolgt durch die Matrix h. Für die linke Seite ist einzutragen (g, q gehen nicht ein, sind Null):

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \vec{r} = \begin{bmatrix} 0 \\ v_W \end{bmatrix} \tag{7}$$

Für die rechte Seite kommen die "Diffusionsterme" aus der DGL zum Einsatz. Die Variable r aus Gl. 4a wird nicht gebraucht und ist deswegen Null. Der Normalenvektor entfällt im Eindimensionalen und als RB-Gleichung für die DGL bleibt:

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{c}\nabla\vec{u} + \mathbf{q}\vec{u} = \vec{g} \tag{8}$$

Durch den Diffusionsterm müssen die RB (2.Gleichung in (1c) und (1d)) mit dessen Faktoren multipliziert werden

$$\frac{E}{\varrho}u_{,x}(L) = \frac{E}{\varrho}\left(\frac{F(t)}{EA} + \alpha v(L)\right) \qquad \frac{\lambda}{\varrho c}v_{,x}(L) = \frac{h}{\varrho c}\big(v_U - v(L)\big) \tag{9}$$

Die Matrix $\mathbf{q}$ und der Vektor $\vec{g}$ lassen sich dann ablesen.

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{E\alpha}{\varrho} \\ 0 & \frac{h}{\varrho c} \end{bmatrix} \qquad \vec{g} = \begin{bmatrix} \frac{F(t)}{\varrho A} \\ \frac{h}{\varrho c} v_U \end{bmatrix} \tag{10}$$

Als Anfangsbedingungen sind für die Verschiebung $u(x, 0)$, $u_{,t}(x, 0)$ und für die Temperatur $v(x, 0)$, $v_{,t}(x, 0)$ vorzugeben. Wir vernachlässigen in den nächsten Abschnitten die Verträglichkeit der AB mit den RB und die korrekte Wiedergabe des physikalischen Ablaufs. COMSOL liefert auch Ergebnisse für inkompatible AB, deren physikalische Bedeutung fragwürdig ist. Wir widmen uns diesem Problem in einem gesonderten Abschnitt.

Formulierung in der General Form

Die abhängigen Variablen werden wie in der Coefficient Form gewählt. Mit der General Form

$$\mathbf{e_a} \vec{u_{,tt}} + \mathbf{d_a} \vec{u_{,t}} + \nabla \cdot \mathbf{\Gamma} = \mathbf{F} \tag{11}$$

und unter Beachtung der COMSOL-Notation

$$\nabla \cdot \mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} \nabla \cdot \Gamma_1 \\ \nabla \cdot \Gamma_2 \end{bmatrix} \tag{12}$$

muss man folgende Werte eingeben:
$\mathbf{e_a}$ und $\mathbf{d_a}$ wie in der Coefficient Form; außerdem

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} -\frac{E}{\rho} u_{,x} \\ -\frac{\lambda}{\rho c} v_{,x} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} -\frac{E\alpha}{\rho} v_{,x} \\ -\frac{T_0 E\alpha}{\rho c} u_{,xt} \end{bmatrix} \tag{13}$$

Zur Eingabe der RB ist das Muster

$$-\vec{n} \cdot (\Gamma_1 - \Gamma_2) = \mathbf{G} + \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u} \right)^T \vec{\mu} \tag{14a}$$

$$\mathbf{R} = 0 \tag{14b}$$

zu verwenden. Bei der Dirichlet-Randbedingung auf der linken Seite lautet die relevante Gleichung $\mathbf{R} = 0$. Infolgedessen ist

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} u \\ v - v_U \end{bmatrix} \tag{15}$$

Die vorgegebene Form für die Neumann-Randbedingung auf der rechten Seite lautet

$$-n \cdot \mathbf{\Gamma} = \mathbf{G}. \tag{16}$$

Um auf diese Form zu kommen wird die gekoppelte Randbedingung in (2a) mit $-\frac{E}{\rho}$ durchmultipliziert; Gleichung (2b) wird mit $-\frac{1}{\rho c}$ erweitert. Schließlich erhält man

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \frac{E\alpha}{\rho} v + \frac{F(t)}{\rho A} \\ -\frac{h}{\rho c}(v - v_W) \end{bmatrix} \tag{17}$$

Die Anfangsbedingungen sind wie in der Coefficient Form einzutragen. Es ist zu erkennen, dass die General Form nur eine alternative Formulierung der Coefficient Form ist; beide sind völlig äquivalent. Für dieses Beispiel ist die General Form etwas übersichtlicher.

Formulierung in der Weak Form

Zur Herleitung der schwachen Form wird die Verschiebungsgleichung mit einer virtuellen Verschiebung δu und die Temperaturgleichgung mit einer virtuellen Temperatur δv multipliziert und anschließend über die Länge L integriert. Um die Einzelkraft am rechten Rand in die Feldgleichung einzubeziehen, wird sie als Dirac-Impuls der Längslast beschrieben $q(x,t) = F(t)\delta_D(x - L)$.

$$\int_0^L u_{,tt}\delta u - \frac{E}{\varrho} u_{,xx}\delta u + \frac{E\alpha}{\varrho} v_{,x}\delta u - \frac{F}{\varrho A}\delta_D(x-L)\delta u \; \mathrm{d}x = 0 \tag{18a}$$

$$\int_0^L v_{,t}\delta v - \frac{\lambda}{\varrho c} v_{,xx}\delta v + \frac{T_0 E\alpha}{\varrho c} u_{,xt}\delta v \; \mathrm{d}x = 0 \tag{18b}$$

Nach partieller Integration und Anwendung des Fundamentallemmas der Variationsrechnung erhält man als Feldgleichungen

$$u_{,tt}\delta u + \frac{E}{\varrho} u_{,x}\delta u_{,x} + \frac{E\alpha}{\varrho} v_{,x}\delta u = 0 \tag{19a}$$

$$v_{,t}\delta v + \frac{\lambda}{\varrho c} v_{,x}\delta v_{,x} + \frac{T_0 E\alpha}{\varrho c} u_{,xt}\delta v = 0 \tag{19b}$$

und als Randbedingungen mit $\delta u(0,t) = \delta v(0,t) = 0$ und $\lambda v_{,x}(L,t) = h\big(v_U - v(L,t)\big)$

$$\left| \frac{E}{\varrho} u_{,x} \right|_0^L \delta u + \frac{F(t)}{\varrho A}\delta u(L,t) = \frac{E}{\varrho} u_{,x}(L,t) + \frac{F(t)}{\varrho A} = 0 \tag{20a}$$

$$\left| \frac{\lambda}{\varrho c} v_{,x} \right|_0^L \delta v = \frac{h}{\varrho c}\big(v_U - v(L,t)\big) = 0 \tag{20b}$$

In der *weak form, subdomain* erwartet COMSOL eine Formulierung nach dem Muster

$$\underbrace{\int_\Omega \nabla v \dot{\Gamma} + vF \; \mathrm{d}A}_{\text{subdomain}} + \underbrace{\int_{\partial\Omega} v\left(G + \frac{\partial R}{\partial u}\mu\right) \; \mathrm{d}S}_{\text{B.C.}} = 0. \tag{21}$$

Diese Gleichung stammt aus der COMSOL-Hilfe. Die Variable v steht darin für eine allgemeine Testfunktion und nicht für die Übertemperatur, wie in allen anderen Gleichungen dieses Artikels. Zur Eingabe der Testfunktion schreibt man in COMSOL `test(..)`, z.B. δu =`test(u)`. Die Eingabe der Feldgleichung sieht so aus:

subdomain, weak term: `E*(-ux*test(ux)-alpha*vx*test(u))/rho`

subdomain, weak term: `(-lambda*vx*test(vx)-T0*E*alpha*uxt*test(v))/(rho*c)`

subdomain, timedependent weak: `utt*test(u)`

subdomain, timedependent weak: `vt*test(v)`

Auf der linken Seite liegen Dirichlet RB vor. Die Werte der Feldgrößen sind fest vorgeschrieben, deren Variation ist Null.

B.C. weak - left: `0`

B.C. weak - left: `0`

Zum Vorschreiben eines Wertes wird ein Ausdruck angegeben der zu Null werden soll:

B.C. constraint - left: `u`

B.C. constraint - left: `v-vW`

Auf der rechten Seite sind sowohl die Verschiebung als auch die Temperatur unbekannt. Demzufolge sind deren Variationen ungleich Null. Als schwache Terme am Rand sind enzugeben:

B.C. weak - right: `(alpha*E*v/rho+F/A)*test(u)`

B.C. weak - right: `h*(-v+vU)*test(v)/(rho*c)`

Es gibt keine vorgeschriebenen Werte, daher ist als Bedingung Null einzusetzen:

B.C. constraint - right: `0`

B.C. constraint - right: `0`

Kennt man die Coefficient Form oder die General Form einer Gleichung, dann kann man sich durch folgende Schritte die Weak Form ausgeben lassen.

- *Physics → Model Settings → Equation system form: Weak*
- *Physics → Equation System → Subdomain*
- *Physics → Equation System → B.C.*

Zwei gekoppelte PDE Modes mit jeweils einer abhängigen Variable

Ein Schwierigkeit ist die Interpretation der Koeffizientenform für ein Mehrfeldproblem dessen Variablenzahl ungleich der Dimension ist. Die Zerlegung in skalare partielle Differentialgleichungen, macht die Eingabe der Koeffizienten übersichtlich. Bei der Erstellung eines neuen Modells läßt sich über die Schaltfläche *Multiphysics→Add* ein weiterer Mode hinzufügen. Der erste Mode ist die Verschiebungsgleichung (1a), für die Coefficient Form folgen die Einträge

$$\mathbf{e_a} = 1 \quad \mathbf{c} = \tfrac{E}{\varrho} \quad f = -\tfrac{E\alpha}{\varrho} v_{,x} \tag{22}$$

Der zweite Mode ist die Temperaturgleichung (1b), mit den Einträgen

$$\mathbf{d_a} = 1 \quad \mathbf{c} = \tfrac{\lambda}{\varrho c} \quad f = -\tfrac{T_0 E\alpha}{\varrho c} u_{,xt} \tag{23}$$

Die Randbedingungen sind ebenfalls skalare Gleichungen.

$$\begin{array}{llll} & \text{links} & \text{rechts} & \\ \text{Verschiebung} & h=1 & h=0 & \\ & r=0 & q=0 & g=\frac{F(t)}{\rho A}+\frac{E\alpha}{\rho}v \\ \text{Temperatur} & h=1 & h=0 & \\ & r=v_W & q=\frac{h}{\rho c} & g=\frac{h}{\rho c}v_U \end{array} \tag{24}$$

Kompatibilität der Anfangs- und Randbedingungen

Der Stab befindet sich in einem stationären Zustand bis er zum Zeitpunkt Null durch einen kurzen Laserimpuls punktuell erwärmt wird. Ebenso beginnt die Kraftanregung zur Zeit $t = 0$. Die Anfangsbedingungen sollen diesen Zustand wiedergeben. Inkonsistente Anfangsbedingungen und inkompatible Randbedingungen können wie Impulsanregungen auf die Rechnung wirken. Im ersten Zeitschritt, zum Zeitpunkt $t = 0$, werden Gleichgewichtszustände ausiteriert. Ihre Lösung kann von den vorgegebenen AB abweichen, wenn diese die RB verletzen. Als erstes soll das **stationäre thermische Problem** $v^*_{,xx}(x) = 0$ gelöst werden von dessen Lösung der mechanische Zustand abhängt. Die Lösung ist eine lineare Funktion, die durch die RB

$$v(0)^* = v_W \quad v^*_{,x}(L) = \frac{h}{\lambda}\Big(v_U - v^*(L)\Big) \tag{25}$$

festgelegt ist. Die Lösung lautet

$$v^*(x) = \frac{h(v_U - v_W)}{\lambda + hL}x + v_w. \tag{26}$$

Die Lösung der Verschiebungsgleichung $u^*_{,xx} = \alpha v^*_{,x}$ ist eine Parabel, deren ersten beiden Koeffizienten aus der Lösung des Temperaturfeldes folgen.

$$u^*_{,x}(x) = \alpha v^*(x) \tag{27}$$

Wegen $u^*(0) = 0$ verschwindet das Absolutglied und die Lösung zum Zeitpunkt $t = 0$ lautet somit

$$u(x,0) = u^*(x) = \alpha\left(\frac{h(v_U - v_W)}{2(\lambda + hL)}x^2 + v_w x\right). \tag{28}$$

In Hinblick auf die Zeitableitung ist die Bewegungsgleichung 2.Ordnung und die Temperaturgleichung 1.Ordnung. Trotzdem erlaubt COMSOL die Eingabe von $v_{,t}(x,0)$. Damit dieser Term zum Anfangszustand kompatibel ist, sollte er aus $v(0,x) = v^*(x) + g(x)$ berechnet werden.

$$v_{,t}(x,0) = \frac{\lambda}{\varrho c}\Big(\underbrace{v^*_{,xx}(x)}_{=0} + g_{,xx}(x)\Big) \tag{29}$$

Die Ausführung dieser Rechnungen von Hand ist nicht nötig. Man kann COMSOL zur Lösung der stationären Aufgabe verwenden und deren Lösung als AB der transienten Aufgabe einlesen.

3D-Vergleichssimulation mit den Application Modes

Mit dem vorgegebenen Modul *Thermal-Structural Interaction - Transient Analysis* Es handelt sich hierbei um eine sehr benutzerfreundliche Art der Berechnung - allerdings sind die Fallen gut versteckt. Durch die dreidimensionale Darstellung sind die Ergebnisse relativ spektakulär. Der Benutzer kann aber nur begrenzt Einfluss auf die Gleichungen nehmen. Das Vorgehen ist folgendermaßen:

1. Öffnen eines neuen Projekts in *Structural Mechanics Modul, Thermal-Structural Interaction, Solid Stress-Strain with Thermal Expansion, Transient analysis*

2. Erzeugen der Geometrie: Zylinder mit Radius r und Länge l

3. Eingabe der Subdomain-Settings (*F8-Taste*)

   - Solid, Stress-Strain (Application Mode unter *Multiphysics* einstellen): in Library Material *Structural Steel* als Material auswählen. Die Gleichungen sind schon vorgegeben und lassen sich nicht verändern.
   - General Heat Transfer:
     Material auswählen: auch hier als Library Material *Structural Steel*. Achtung: Die Wärme-Rückopplung wird in der Differentialgleichung weggelassen, weil der Betrag davon vernachlässigbar klein ist. Falls man diese aber trotzdem sehen möchte, muss $Q = -T_0 E \alpha u_{,xt}$ (Feld *Heat source*) eingegeben werden.

4. Einstellen der Boundary Conditions (*F7-Taste*)

   - Solid, Stress-Strain:
     Feste Einspannung bei $x = 0$: der entsprechende Knoten wird auf `Fixed` eingestellt
     Belastung $F(t)$ bei $x = L$: in der Registerkarte *Load*; Achtung: eingegeben wird eine Spannung, keine Kraft.

   - General Heat Transfer:
     Konstante Temperatur bei $x = 0$: Randbedingungsart auf `Temperature` einstellen und Temperatur in [K] eingeben
     Wärmeleitung bei $x = L$: entsprechend `Heat Transfer` auswählen, dann T_{inf} (Umbgebungstemperatur) und h spezifizieren.

5. Vor der Simulation müssen noch die Solver Parameters korrigiert werden: unter *Solve*, *Solver Parameters*, Registerkarte *Time Stepping*, *Time Steps taken from Solver* auf `Strict` einstellen. Dies ist insbesondere bei einer oszillierenden Belastung extrem wichtig. Außerdem muss man das Netz vor der Berechnung mehrfach verfeinern, um Ergebnisse mit möglichst wenigen Sprüngen zu bekommen. Infolgedessen wird die Berechnungszeit sehr groß.

Die Bilder, die hieraus resultieren, sehen für den Betrachter relativ schön aus. Um einen eindeutigen 1D-Plot, wie in den PDE-Modes zu bekommen, wählt man *Cross-Section Plots* im Post-Processor (*F12-Taste*).

Anhang

Ergebnisse mit beispielhaften Parametern

Es empfiehlt sich, die Konstanten in COMSOL unter *Constants...* und die Anfangstemperatur sowie die Kraftanregung unter *scalar Expressions* im *Options*-Menü einzugeben. Durch die Funktionen Exportieren und Importieren müssen sie so nur einmal eingegeben werden, auch wenn verschiedene Modelle getestet werden.

Stablänge	l	$1\,\mathrm{m}$
Radius	r	$0.1\,\mathrm{m}$
Querschnittsfläche (Kreisquerschnitt)	A	$\pi \cdot 0.1^2\,\mathrm{m}^2$

Tabelle 1: Geometrie

E-Modul	E	$200 \cdot 10^9\,\mathrm{Pa}$
Wärmekapazität	c	$475\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kgK}}$
Wärmeleitfähigkeit	λ	$44.5\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{mK}}$
Wärmeausdehnungskoeffizient	α	$12.3 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{K}^{-1}$
Wärmeübergangskoeffizient	h	$5\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{K}}$
Massendichte	ρ	$7850\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$

Tabelle 2: Materialparameter

Referenztemperatur	T_0	$273.15\,\mathrm{K}$
Wandübertemperatur	v_W	$320\,\mathrm{K}$
Umgebungsübertemperatur	v_U	$290\,\mathrm{K}$

Tabelle 3: Temperaturwerte

Kraftanregung	$\frac{F(t)}{A}$	$-10^7 \cdot (1 + sin(\frac{2\pi}{200}t)\,\mathrm{Pa}$
Anfangstemperatur	$\Phi(x)$	$v_W - (v_W - v_U) \cdot x + 200\,\mathrm{K} \cdot exp(-200 \cdot (\frac{x}{l} - 0.5)^2)$

Tabelle 4: Anregung

Eingabe des Timoshenko-Balkens in der schwachen Formulierung

Ein typisches Beispiel für partielle Differentialgleichungen in der Mechanik ist der Timoshenko-Balken unter zeitveränderlicher Belastung.

```
appl.dim = {'w','phiy','w_t','phiy_t'};
appl.shape = {'shlag(1,''w'')','shlag(1,''phiy'')'};
equ.dweak = {{'rho*A*wtt*test(w)';'rho*Iyy*phiytt*test(phiy)'}};
equ.weak = {{'-G*A*kappa*(phiy+wx)*test(wx)';'-E*Iyy*phiyx*test(phiyx)-G*A*kappa*(
appl.gporder = {1,1};
```

Eingabe einer Koeffizientenmatrix im m-file

Matrizen werden im m-file eines Modells als Struktur eingegeben, hier am Beispiel von $\boldsymbol{\beta}$ aus Gl. 3: `equ.be={{{0;0},{E*a/r;0};{0;0},{0;0}}};}`

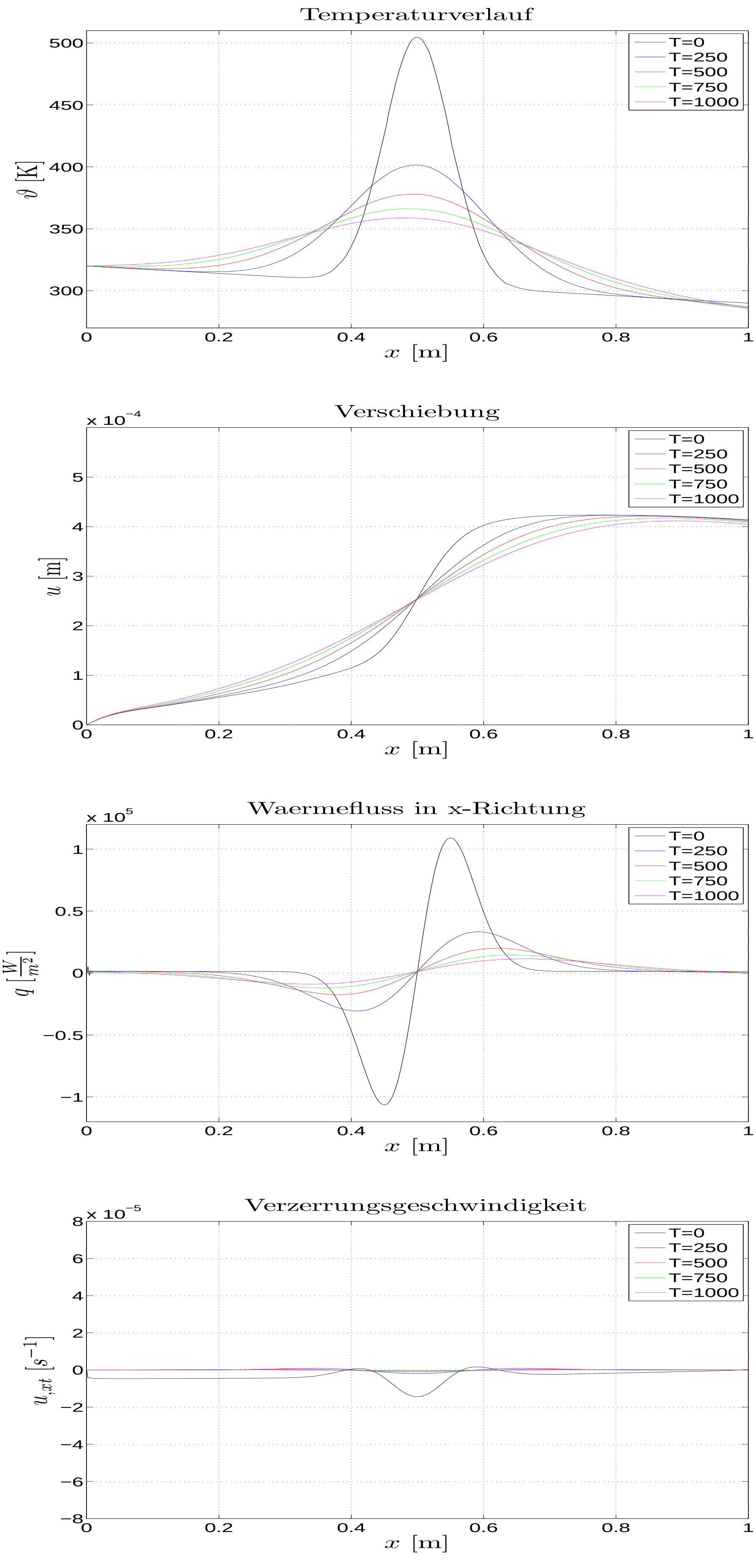

Abbildung 1: Ergebnisse für eine konstante Kraft $F(t) = \hat{F}$ am rechten Rand, (1a) Temperatur, (1b) Verschiebung, (1c) Wärmestrom, (1d) Verzerrungsgeschwindigkeit

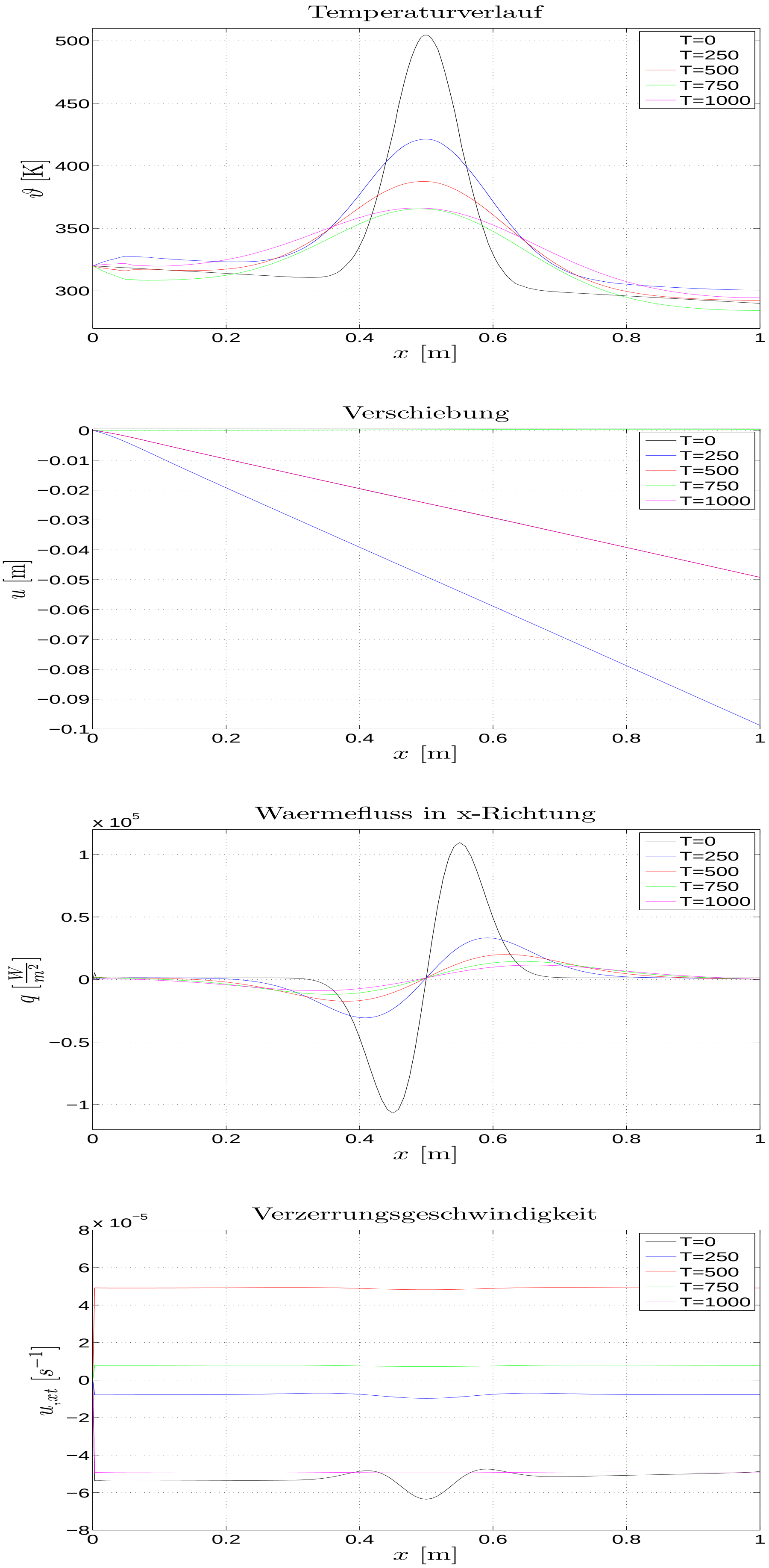

Abbildung 2: Ergebnisse für eine periodische Kraft $F(t) = \hat{F}\sin(\Omega t)$ am rechten Rand, (2a) Temperatur, (2b) Verschiebung, (2c) Wärmestrom, (2d) Verzerrungsgeschwindigkeit